Méthode de la théorie des EDL

14 février 2019

1 Exponentielle de matrices

1.1

Soient X et Y des matrices carrées réelles telles que : $\forall t \in \mathbf{R} \quad e^{tX}e^{tY} = e^{tY}e^{tX}$. Montrer que $XY = YX$.

faire un DL

1.2 Groupes à un paramètre, essentiel

Soit ϕ un morphisme continu de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(GL_n(\mathbf{C}), \times)$. Montrer qu'il existe une matrice A telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\phi(t) = e^{tA}$.

intégrer, Mq inversible
dériver

2 DSE

2.1 Franchissement de singularités

On envisage l'équation différentielle : $(E) : y'' + (1 - \frac{2}{t^2})y = 0$.
a) Montrer qu'elle admet une solution développable en série entière sur $\mathbf{R}$ que l'on calculera (évaluer $\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!}$).
b) Montrer qu'il existe une fonction impaire w, développable en série entière sur $\mathbf{R}$, telle que $t \rightarrow \frac{1}{t} + w(t)$ soit solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

c) Donner les solutions bornées sur $\mathbf{R}$.

2.2

Soit p une fonction développable en série entière au voisinage de 0. Montrer que les solutions de $y" = py$ sont développables en série entière au voisinage de 0.

3 EDLS

3.1

Trouver toutes les applications dérivables $f :]-1,1[\to \mathbf{R}$ telles que pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x)f(-x) = \frac{1}{1-x^2}$.

3.2

Soit E le sev de $C^2([0,1],\mathbf{R})$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour $f \in E$ on pose $N(f) = \|f + 2f' + f"\|_\infty$. Montrer que N est une norme, la comparer à $\| \|_\infty$, (E,N) est-il complet ?

3.3

Soit (y_1, y_2) un système fondamental de solutions d'une EDL à données continues $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ sur l'intervalle non trivial I. Soit n un nombre entier ≥ 1. Montrer que la famille $y_1^p y_2^q$, $p + q = n$, est libre.

3.4

Soient $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^1([1,+\infty[, \mathbf{R}^{+*})$ telle que $\lim_{+\infty} f' = a$. On considère $u \in \mathcal{C}^2([1,+\infty[, \mathbf{R})$ bornée et solution de l'équation différentielle (E) :
$y'' - \frac{f'}{f} y' - \frac{y}{f^2} = 0$.
a) Montrer que $u'(x) = O(1/x)$ quand $x \to +\infty$ (utiliser un facteur intégrant).
b) Montrer que $u(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

4 Systèmes

4.1

On envisage le système $(t-1)x' = x - y$, $(t+1)y' = x - ty$.
En donner une solution évidente, puis déterminer un système fondamental de solutions en cherchant une seconde solution sous la forme $\lambda(x,y) + \mu(x',y')$, λ et μ étant des fonctions de classe C^1.

4.2

a) Soit $A \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^+, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$, intégrable sur $\mathbf{R}^+$. Soit u à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, solution de l'équation différentielle $u' = A(t)u$. Montrer que u est bornée, puis que u admet une limite en $+\infty$.
b) Soit ϕ l'application qui à $u_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ associe la limite en $+\infty$ de la solution u précédente avec la condition initiale $u(0) = u_0$. Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et calculer son déterminant.

5 Calcul variationnel

Soient E l'ensemble des applications f de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0) = f(1) = 0$, F l'espace affine des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On pose, pour $f \in F$:

$$I(f) = \int_0^1 e^t(f^2(t) + f'^2(t))dt.$$

a) Soit $g \in E$. Déterminer la dérivée en 0 de $\lambda \to I(f + \lambda g)$.

b) Montrer que I possède un min. sur F et déterminer les points en lequel il est atteint.

6 Solutions oscillantes et équations d'Euler

Soit $q : [0, +\infty[\to \mathbf{R}^{+}$ continue.

a) On suppose que ϕ est une solution bornée non nulle de $y'' + q(t)y = 0$ (E) qui ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$. Montrer que $t \to tq(t)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

b) On suppose que la limite inférieure de $t \to t^2 q(t)$ en $+\infty$ est strictement supérieure à $\frac{1}{4}$. Soit ϕ une solution de $y'' + q(t)y = 0$ (E) montrer que ϕ s'annule une infinité de fois.

c) On suppose que $t \to t^2 q(t)$ est inférieure à $\frac{1}{4}$ pour t assez grand ; soit ϕ une solution de $y'' + q(t)y = 0$ (E) montrer que ϕ s'annule un nombre fini de fois.